Paper CIT06-0537

ANÁLISE TEÓRICA DA ENTRADA TÉRMICA TRANSIENTE EM DUTOS DE SECÇÃO REGULAE E IRREGULAR

Jacques Cesar dos Santos
(*) Laboratório de Energia Solar(**LES**) da UFPB, Cidade Universitária -Campus I, 58059-900, João Pessoa/PB
e-mail: jacquesles@yahoo.com.br

Romberg Rodrigues Gondim
(*), e-mail: romberg@les.ufpb.br

Resumo. *No presente trabalho a convecção forçada laminar transiente, hidrodinâmicamente desenvolvida, no interior de dutos de secçãoregular e irregular é estudada através da Tecnica da Transformada Integral associada ao Método das Linhas. A Transformada Integral elimina as variáveis espaciais nas quais a difusão é predominanate, resulta um sistema de equações diferenciais parciais acopladas, no qual a convecção é predominanate, que é sulucionado numericamente através do Método das Linhas. São apresentados resultados para a temperatura média e o número de Nusselt ao longo do duto.*

Palavras chave: Transformada Integral, Método das Linhas, Entrada Térmica, Seção Regular e Irregular.

1. Introdução

A solução da transferência de calor para a convecção laminar no interior de dutos de secções transversais de vários tipos é de grande interesse no projeto de trocadores de calor e outros dispositivos térmicos para baixos números de Reynolds. Shah & London (1978) apresenta uma compilação de diversas soluções analíticas e numéricas para a convecção forçada no escoamento laminar em dutos. Cotta (1993) apresenta a solução da convecção permanente e hidrodinâmicamente desenvolvida para o duto retangular sujeito à temperatura prescrita nas paredes do duto, através da Técnica da Transformada Integral Generalizada. Junior & Aparecido (1999) apresenta uma solução através da Técnica da Transformada Integral para a entrada térmica permanente no interior de dutos retangulares sujeitos a condições de contorno do 3º tipo. Castellões (2004) estudou a entrada térmica transiente no interior de microcanais de placas planas em regime laminar, considerando a presença do termo de difusão axial na equação da energia e o termo de dissipação viscosa. Utilizando uma solução através da Técnica da Transformada Integral aliada ao Método das Linhas para resolver o problema térmico. No presente trabalho é formalizada uma solução para a entrada térmica transiente no interior de um duto de secção arbitrária submetido a condições de contorno do 3º tipo nas paredes do duto. A solução é obtida através da Transformada Integral associada ao Método das Linhas, segundo Wouer *et all* (2005) o Método das Linhas é um dos mais populares esquemas para solucionar equações diferenciais parciais. Primeiro as variáveis espaciais são aproximadas usando o Método das Diferenças Finitas, Elementos Finitos ou Volumes Finitos. Segundo o sistema ordinário resultante é numericamente solucionado. A Transformada Integral elimina as variáveis espaciais nas quais a difusão é predominante e o Método das Linhas trata a parte hiperbólica resultante, onde a convecção é predominante, o sistema é truncado em um numero de termos necessários para a convergência e numericamente solucionado. São apresentados resultados para a temperatura média ao longo do duto.

2. Formulação do Problema

O problema físico considerado aqui inclui, como casos especiais, a classe dos problemas de convecção forçada transiente no através de uma região plana arbitraria V com uma superfície de contorno S, segundo Cotta & Gerk (1994, p.435) possui uma formulação geral dada por:

$$\gamma(r)\frac{\partial\theta(r,z,\tau)}{\partial\tau}+W(r)\frac{\partial\theta}{\partial z}+L\theta=0 \qquad r\in V, \quad z>0, \quad \tau>0, \tag{1.a}$$

onde

$$L\equiv-\nabla\cdot K(r)\nabla+d(r) \tag{1.b}$$

com condição inicial, de entrada e condições de contorno dadas respectivamente por:

$$\theta(r,z,0)=\theta_0(r,z) \qquad r\in V, \qquad z\geq 0 \tag{1.c}$$

$$\theta(r,0,\tau)=\theta_e(r,\tau) \qquad r\in V, \qquad \tau>0 \tag{1.d}$$

$$B\theta(r,z,\tau)=0 \qquad r\in S, \qquad z>0, \qquad \tau>0 \tag{1.e}$$

$$B\equiv \alpha_r(r)+\beta(r)_r K(r)\frac{\partial}{\partial n} \tag{1.f}$$

3. Metodologia de Solução

Procura-se uma solução do sistema de Eqs. 1.a-f em termos de Expansão em Autofunções na variável r e Método das Linhas nas demais, como segue:

3.1. Problema de Autovalor

Como primeiro passo para resolver o problema (1.a-f), Propõe-se um problema de autovalor que fornecerá a base de autofunções, como segue:

$$L\psi_i(r)=\mu_i^2 W(r)\psi_i(r) \qquad r\in V \tag{2.a}$$

$$B\psi_i(r)=0 \qquad r\in S \tag{2.b}$$

Cujas autofunções normalizadas $\tilde{\psi}_i(r)$ e os autovalores μ_i são obtidos da solução do problema de autovalor Eqs. (2.a-b), através da própria Técnica da Transformada Integral, apresentada em Sphaier & Cotta (2002).

3.2. Par Transformada-Inversa

Utilizando-se as autofunções normalizadas do problema 2.a-b, pode-se definir o par tranformada-inversa :

$$\bar{\theta}_i(z,\tau)=\int_V W(r)\tilde{\psi}_i(r)\theta(r,z,\tau)dv \qquad \text{transformada} \tag{3.a}$$

$$\theta(r,z,\tau)=\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{\psi}_i(r)\bar{\theta}_i(z,\tau) \qquad \text{inversa} \tag{3.b}$$

3.3. Transformação do Problema

O problema definido pelas Eqs. 1.a-f. é operado com $\int_V W(r)\tilde{\psi}_i(r)dv$, e o sistema transformado pode ser reescrito como:

$$\sum_{j=1}^{\infty}A1_{ij}\frac{\partial\bar{\theta}_j(z,\tau)}{\partial\tau}+\frac{\partial\bar{\theta}_i}{\partial z}+\mu_i^2\bar{\theta}_i=0 \qquad \text{i= 1,2...}, \qquad z>0, \qquad \tau>0 \tag{4.a}$$

$$\bar{\theta}_{0,i}(z,0)=\int_V W(r)\tilde{\psi}_i(r)\theta_0(r,z)dv \qquad z\geq 0 \tag{4.b}$$

$$\bar{\theta}_{e,i}(0,\tau)=\int_V W(r)\tilde{\psi}_i(r)\theta_e(r,\tau)dv \qquad \tau>0 \tag{4.c}$$

onde:

$$A1_{ij}=\int_V \gamma(r)\tilde{\psi}_i(r)\tilde{\psi}_j(r)dv \tag{4.d}$$

3.4. Solução do Sistema Transformado

O sistema de equações diferenciais acoplado, Eqs. 4.a-d, é truncado e solucionado numericamente através do Método das Linhas, onde a variável espacial remanescente é discretizada por diferenças finitas e o sistema diferencial ordinário de primeira ordem, resultante, é solucionado com controle automático de erro, e o potencial original é recuperado utilizando-se a Eq. 3.b, como segue:

$$\theta(r,z,\tau)=\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{\psi}_i(r)\bar{\theta}_i(z,\tau) \qquad r\in V\,,\quad z>0\,,\ \tau>0 \tag{5}$$

Onde a expressão da Eq. 5 representa uma solução formal, em termos de Expansão em Autofunções, para o problema da entrada térmica transiente no interior de dutos de seção transversal arbitrária.

4. Aplicações

Para ilustrar a aplicação da solução através da Transformada Integral e Método das Linhas, este procedimento será aplicado ao problema da entrada térmica, no escoamento laminar hidrodinamicamente desenvolvido no interior de dutos, como é o caso do canal de placas planas e tubos circulares. A temperatura de entrada será assumida como uma função do tempo. Serão desprezados os efeitos da condução axial, da dissipação viscosa e da convecção livre na parede, e as propriedades físicas serão consideradas constantes. Segundo Cotta & Özisik (1986, p.1495) a equação da energia adimensional é dada por:

$$r^n\frac{\partial\theta(r,z,\tau)}{\partial\tau}+r^n\frac{u(r)}{2^{4-2n}}\frac{\partial\theta(r,z,\tau)}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial r}\left(r^n\frac{\partial\theta(r,z,\tau)}{\partial r}\right) \qquad 0<r<1\,,\quad z>0\,,\quad \tau>0 \tag{6.a}$$

com condição inicial, de entrada e condições de contorno dadas, respectivamente por:

$$\theta(r,z,0)=\theta_0(r,z) \qquad 0<r<1\,,\quad z>0 \tag{6.b}$$

$$\theta(r,0,\tau)=\theta_e(r,\tau) \qquad 0\le r\le 1\,,\quad \tau>0 \tag{6.c}$$

$$\left.\frac{\partial\theta(r,z,\tau)}{\partial r}\right|_{r=0}=0 \qquad z>0\,,\quad \tau>0 \tag{6.d}$$

$$\theta(1,z,\tau)=0 \qquad z>0\,,\quad \tau>0 \tag{6.e}$$

Segundo Mikhailov & Özisik (1984, p.343) $\quad u(r)=\dfrac{n+3}{2}(1-r^2)$ (6.f)

O problema definido pelo sistema de Eqs. 6.a-f é um caso particular do problema mais geral dado pelas Eqs. 1.a-f, e a correspondência entre os dois sistemas é dado por:

$$\gamma(r)=r^n\,,K(r)=1\,,d(r)=0\,,\ L=\nabla^2\,,W(r)=r^n\frac{u(r)}{2^{4-2n}}\,,n=\begin{cases}0 & ,\quad \text{para o canal de placas planas}\\ 1 & ,\quad \text{para duto circular}\end{cases}$$

$$\alpha_r(r)=0\quad \beta_r(r)=1\,,\quad \text{para}\ \ r=0\,,\qquad \alpha_r(r)=1\qquad \beta_r(r)=0\,,\qquad \text{para}\ \ r=1 \tag{7.a-j}$$

O problema de autovalor em r com as respectivas condições de contorno é dado por:

$$-\frac{d}{dr}\left(r^n\frac{d\psi_i(r)}{dr}\right)=\mu_i^2W(r)\psi_i(r)\ ,\quad \left.\frac{d\psi_i(r)}{dr}\right|_{r=0}=0\ ,\quad \psi_i(1)=0 \tag{8.a-c}$$

A solução do problema definido pelo sistema de Eqs. 6.a-f é, então, obtido a partir da Eq. 5, fazendo-se as substituições dos termos definidos nas Eqs. 7.a-j, e as respectivas autofunções. A temperatura média e o numero de Nusselt local são dados, segundo Cotta (1998, p. 267 seq.) por:

$$\theta_m(z,\tau) = 2^{4-2n}(n+1)\int_0^1 r^n W(r)\theta(r,z,\tau)dr \quad , \quad Nu(z,\tau) = 2^{2-n}\frac{\left.\dfrac{\partial\theta(r,z,\tau)}{\partial r}\right|_{r=1}}{\theta(1,z,\tau)-\theta_m(z,\tau)} \qquad \text{(9.a-b)}$$

5. Resultados

As Tabs. 1. e 2. apresentam um estudo da convergência da temperatura média ao longo de z para o canal de placas planas, onde Δz representa o intervalo na malha discreta ao longo de z. A análise do número de termos necessárias na série é omitido aqui. Pode-se observar que há uma melhora na convergência para o aumento do refino da malha. É realizada também uma comparação com dados de Gondim (1997) e Castellões (2004), observa-se que há uma pequena diferença nos resultados devido à ausência do termo de difusão axial no presente modelo.

Tabela 1. Análise da Convergência da Temperatura Média ao Longo de z em Placas Planas, Para: $\theta_e(r,\tau)=1$, com nt=20.

Tempo	z	Gondim 1997	Castellões 2004	Δz				
				0.001	0.0005	0.00025	0.00010	0.00005
τ=0.005	0.0000375	0.98641	0.98988	0.99191	0.99175	0.99175	0.99175	0.99175
	0.0001500	0.92320	0.94306	0.95591	0.95228	0.95225	0.95212	0.95177
	0.0002625	0.75544	0.82154	0.83946	0.84662	0.84472	0.84466	0.84469
	0.0003750	0.45177	0.56967	0.57095	0.60460	0.62242	0.62164	0.62163
τ=0.01	0.0000542	0.98983	0.99035	0.98949	0.98949	0.98949	0.98949	0.98949
	0.0002708	0.94570	0.95162	0.95566	0.95559	0.95560	0.95560	0.95559
	0.0004875	0.83059	0.85631	0.86571	0.86420	0.86417	0.86417	0.86417
	0.0007042	0.57192	0.64416	0.66948	0.67897	0.67748	0.67747	0.67747
τ=0.03	0.0001667	0.98084	0.97999	0.97787	0.97787	0.97787	0.97787	-
	0.0008333	0.93003	0.93126	0.93255	0.93255	0.93255	0.93263	-
	0.0015000	0.82670	0.83695	0.83915	0.83915	0.83915	0.83914	-
	0.0021667	0.58926	0.62451	0.63807	0.63751	0.63751	0.63750	-
τ=0.05	0.0002292	0.97537	0.97485	0.97268	0.97268	0.97268	0.97268	-
	0.0011458	0.92193	0.92202	0.92090	0.92090	0.92094	0.92092	-
	0.0020625	0.86255	0.86526	0.86662	0.86662	0.86662	0.86662	-
	0.0029792	0.73887	0.75049	0.75279	0.75279	0.75279	0.75278	-

Tabela 2. Análise da Convergência da Temperatura Média ao Longo de z em Duto Circular, Para: $\theta_e(r,\tau)=1$, com nt=20.

Tempo	z	Δz 0.001	0.0005	0.00025	0.00010	0.00005
τ=0.01	0.0005000	0.96179	0.96174	0.96174	0.96174	0.96174
	0.0023000	0.76845	0.76809	0.76806	0.76806	0.76806
	0.0034000	0.51735	0.52033	0.52019	0.52018	0.52018
	0.0037000	0.42986	0.43572	0.43581	0.43578	0.43578
	0.0041000	0.30425	0.31004	0.31210	0.31205	0.31205
τ=0.03	0.0005000	0.96175	0.96174	0.96174	0.96174	-
	0.0058000	0.78626	0.78625	0.78625	0.78625	-
	0.0087000	0.60847	0.60846	0.60846	0.60846	-
	0.0101000	0.49525	0.49523	0.49523	0.49523	-
	0.0121000	0.30308	0.30324	0.30323	0.30323	-
τ=0.05	0.0005000	0.96175	0.96174	0.96174	-	-
	0.0062000	0.81307	0.81307	0.81307	-	-
	0.0121000	0.66774	0.66774	0.66774	-	-
	0.0162000	0.49458	0.49458	0.49458	-	-
	0.0205000	0.25361	0.25360	0.25360	-	-
τ=0.06	0.0005000	0.96175	0.96174	0.96174	-	-
	0.0092000	0.76204	0.76204	0.76204	-	-
	0.0181000	0.53064	0.53063	0.53063	-	-
	0.0203000	0.44292	0.44292	0.44292	-	-
	0.0235000	0.35831	0.35831	0.35831	-	-

5. Conclusão

Uma solução formal foi apresentada para a entrada térmica transiente no interior de um duto de secção arbitrária, submetido a condições de contorno do 3° tipo nas paredes do duto. A solução foi obtida através da Transformada Integral associada Ao Método das Linhas. Foram apresentados resultados para a temperatura média transiente ao longo de z, para o canal de placas plana e o duto circular. Neste trabalho foram testadas duas situações. A solução geral é obtida para uma seção transversal arbitraria, o que indica sua validade independente da geometria em estudo. Os resultados são comparados com os dados apresentados por Gondim (1997) e Castellões (2004). A presente solução mostrou ser útil no estudo da entrada térmica transiente no interior de duto de secção arbitrária, apresentando uma boa concordância com os dados da literatura, representando um alternativa aos métodos estritamente numéricos, e oferecer maior liberdade matemática na solução, devido ao seu caráter híbrido, analítico-númerico.

6. Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer o suporte do CNPq.

7. Referências

Castellões, F.V., 2004, "Convecção Transiente em Microcanais Via Transformada Integral", Dissertação de Mestrado, PEM/COPPE/UFRJ, Brasil, 2004.

Cotta, R.M., Özisik, M.N., 1986, "Laminar Forced Convection inside Ducts With Periodic Variation of Inlet Temperature", ", Int. J. Heat Mass Transfer, , Vol. 29, pp. 1495-1501.

Cotta, R.M., 1993, "Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow", CRC Press, Boca Raton, FL, EUA, 1993, 428 p.

Cotta, R.M., Gerk, J. E. V., 1994, "Mixed Finite-difference/Integral Transforms Approach for Parabolic-Hyperbolic Problems in Transient Forced Convection", Numerical Heat Transfer part B-Fundamentals, v.25, n.4, pp. 433-448.

Cotta, R.M., 1998, "The Integral Transform Method in Thermal and Fluids Science and Engeneering", Begell House, New York, 430 p.

Gondim, R.R., 1997, "Convecção Forçada Transiente Interna com Difusão Axial Solução Via Transformação Integral", Tese de Doutorado, PEM/COPPE/UFRJ.
Júnior, T.D., Aparecido, J.B., 1999, "Thermally Developing Laminar Flow Inside Rectangular Ducts Submitted to Boundary Conditions of Third Kind", Proceedings of the 15th Brazilian Congress of Mechanical Engineering, Vol. 11, Águas de Lindóia, São Paulo, Brazil.
Mikhailov, M.D. e Özisik, M.N, 1984, "Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion", Wiley, New York, 524 p.
Shah, R.K., and London, A.L., 1978, "Laminar Flow Forced Convection in Ducts", Academic Press, New York, EUA, 477 p.
Sphaier, L.A., and Cotta, R.M., 2002, "Analytical and Hybrid Solutions of Diffusion Problems Within Arbitrarily Shaped Regions Via Integral Transforms", Computational Mechanics, Vol. 29, pp. 265-276.
Wouwer, A. V., Saucez, P., Schiesser, W. E., Thompson, S., 2005, "A MATLAB implementation of upwind finite differences and adaptive grids in method of lines", Journal of Computational and Applied Mechanics, Vol. 183, pp. 245-258.

THEORETICAL ANALYSIS OF UNSTEADY THERMAL ENTRANCE INSIDE DUCTS OF REGULARLY AND IRREGULARLY SHAPED REGIONS

Jacques Cesar dos Santos
(*) Laboratório de Energia Solar(**LES**) da UFPB, Cidade Universitária -Campus I, 58059-900, João Pessoa/PB
e-mail: jacquesles@yahoo.com.br

Romberg Rodrigues Gondim
(*), e-mail: romberg@les.ufpb.br

Abstract. *In the present work the transient laminar forced convection, hidrodynamically developed, inside ducts of regularly and irregularly shaped regions is studied by using Integral Transforms and Method of Lines. The Integral Transforms eliminates the spatial variables in which the diffusion predominates. A system of coupled hyperbolic equations then results, in which convection is dominant, which is solved numerically by the Method of Lines. Results are then presented for average fluid temperature along the duct.*

Keywords: *Integral Transforms, Method of Lines, Thermal Entrance, Irregularly Shaped Regions.*